



MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE



# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"



INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ  
16 martie 2019

FACULTATEA  
CONSTRUCȚII DE MAȘINI  
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a IX-a

## Problema 1.

Se consideră mulțimea  $Q(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$

- Demonstrați că pentru orice  $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ , dacă  $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$ , atunci  $a = c$  și  $b = d$
- Determinați  $x, y \in \mathbb{Q}$  care verifică egalitatea  $\frac{x + y\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} - \frac{4 + 3\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = 2$
- Arătați că numerele  $(1 + \sqrt{2})^2 + (2 + \sqrt{2})^2$  și  $(1 - \sqrt{2})^2 + (2 - \sqrt{2})^2$  sunt din  $Q(\sqrt{2})$ .
- Arătați că pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$  nu există  $n$  numere din  $Q(\sqrt{2})$  încât suma pătratelor lor să fie  $1 + \sqrt{2}$ .

## Problema 2.

Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & ; x < -1 \\ x - 2 & ; x \in [-1; 1] \\ -3x + 2 & ; x > 1 \end{cases}$ . Se cere:

- Arătați că rezultatul calculului  $3f\left(\sqrt{2} - \frac{5}{2}\right) + f(\sqrt{8} - 1)$  este număr rațional.
- Determinați numerele  $a, b \in \mathbb{R}$  pentru care  $A(2; a)$  și  $B(b; -2)$  sunt puncte pe graficul funcției  $f$ .
- Determinați dacă există două numere  $m, n \in \mathbb{R}$  încât pentru orice  $x \in \mathbb{R}$  să se verifice  $f(x) = m \cdot |x + 1| + n \cdot |x - 1|$ .

## Problema 3.

În triunghiul  $ABC$  cu laturile de lungimi  $AB = c$ ,  $BC = a$ ,  $AC = b$  și  $b \neq c$ , considerăm  $[AD]$ , cu  $D \in (BC)$ , bisectoarea unghiului  $\angle BAC$  și punctele  $M \in (AB)$ ,  $N \in (AC)$  încât  $[BM] \equiv [CN]$ . Dacă  $P$  este mijlocul laturii  $[BC]$  și  $Q$  este mijlocul segmentului  $[MN]$ , demonstrați următoarele:

- $\overrightarrow{AD} = \frac{b}{b+c} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{c}{b+c} \cdot \overrightarrow{AC}$
- $2\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{NC}$
- $PQ \parallel AD$

## Problema 4.

Un copil se joacă umplând cu semne "x" și "o" pătrățelele ultimei foi a unui caiet de lucru, după o regulă inventată de el: scrie un semn "x", apoi două semne "o", apoi trei "x", apoi patru "o", apoi cinci "x" și continuă la fel până umple un careu pătrat cu 121 de pătrățele, după care își continuă jocul și se oprește când scrie al 2019-lea semn. Se cere:

- Aflați care din cele două semne a fost scris ultimul în careul pătrat.
- Aflați care din cele două semne este cel de al 2019-lea semn.
- Arătați că numărul total al unuia din cele 2019 semne scrise este pătrat perfect.
- Arătați că de fiecare dată când copilul scrie un semn "o", cel puțin unul din cele două totaluri de semne de același fel prezente la acel moment pe foaie este pătrat perfect.

**Notă:** Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.